SOLUCIÓN

El *teorema chino de los restos* dice lo siguiente:

Teorema 0.1. *Si MCD*$(m_i, m_j) = 1$ *para* $i \neq j$*, el sistema de congruencias lineales*

$$\begin{cases} N & \equiv & a_1 (\textit{mód}\ m_1) \\ N & \equiv & a_2 (\textit{mód}\ m_2) \\ & \dots & \\ N & \equiv & a_n (\textit{mód}\ m_n) \end{cases}$$

tiene solución única módulo $m = m_1 \dots m_n$*.*

Nota: En este teorema, MCD(a, b) denota el máximo común divisor de a y b.

El sistema de congruencias que debemos resolver es

$$\begin{cases} N & \equiv & 1(\text{mód } 19) \\ N & \equiv & 14(\text{mód } 17) \\ N & \equiv & 1(\text{mód } 12) \end{cases}$$

que cumple las condiciones del teorema anterior.

Vamos a seguir los pasos de la demostración del teorema chino de los restos para solucionarla.

Empezamos por resolver las congruencias lineales siguientes:

1) $204x \equiv 1(\text{mód } 19)$, que tiene solución única (módulo 19), al ser 204 y 19 coprimos ($204 = 17 \times 12$): con los sistemas usuales de resolución de congruencias lineales (en particular, usando la identidad de Bézout), se obtiene como solución $x \equiv 15(\text{mód } 19)$.

2) $228x \equiv 1(\text{mód } 17)$, que tiene solución única (módulo 17), al ser 228 y 17 coprimos ($228 = 19 \times 12$): con los sistemas usuales de resolución de congruencias lineales (en particular, usando la identidad de Bézout), se obtiene como solución $x \equiv 5(\text{mód } 17)$.

3) $323x \equiv 1 (\text{mód } 12)$, que tiene solución única (módulo 12), al ser 323 y 12 coprimos ($323 = 19 \times 17$): con los sistemas usuales de resolución de congruencias lineales (en particular, usando la identidad de Bézout), se obtiene como solución $x \equiv 11 (\text{mód } 12)$.

La solución del sistema de ecuaciones lineales es entonces:

$$204 \times 15 \times 1 + 228 \times 5 \times 14 + 323 \times 11 \times 1 = 22573 \equiv 3193 (\text{mód } 3876).$$

Para ver la prueba de este teorema y las propiedades utilizadas, ver el capítulo 5 de los apuntes de Matemáticas Básicas -o cualquier otro texto sobre congruencias- cuyo enlace está indicado en la entrada del blog.